Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Ene-Mar 2005

Nombre: ______________________________

Carnet: __________________ Sección: ______

MA-2115—Primer Parcial, 02/02/05, 30 %—9:30am–A

#1→12 pts	#2→6 pts	#3→6 pts	#4→6 pts	Total→30 pts

1. (12 pts.) Determine cuáles de las siguientes series convergen y cuáles divergen (3 pts. c/u):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n(n+1)}-\frac{2}{3^{n-1}}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{5^{n-1}}$

Solución:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n(n+1)}-\frac{2}{3^{n-1}}\right)$

Podemos mirar esta serie como la resta de dos series: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n(n+1)}-\frac{2}{3^{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$. Por un lado, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n(n+1)}$ es CONVERGENTE por comparación con la serie (mayorante) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n^2}$ que sabemos que es CONVERGENTE. Por otro lado, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$ es CONVERGENTE por ser una serie geométrica de razón $r=\frac{1}{3}<1$ (con primer término=2).

Entonces la serie dada es CONVERGENTE, pues es la resta de dos series convergentes.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ es CONVERGENTE por comparación con la serie (mayorante) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ que sabemos que es CONVERGENTE (p-serie con $p=\frac{3}{2}>1$).

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

Haciendo uso del criterio de la razón tenemos: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}n!}=$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Por lo tanto la serie dada es CONVERGENTE.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{5^{n-1}}$

Esta serie se puede escribir como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{5}\right)^{n-1}$, y por lo tanto es una serie geométrica de razón $r = -\frac{2}{5}$, y como $|r| < 1$ entonces la serie es CONVERGENTE.

2. (6 pts.) Halle el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3n\,7^n}$.

Solución: Consideremos $a_n = \frac{(x-5)^n}{3n\,7^n}$. Usando el criterio de la razón (o cociente) tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-5)^{n+1}}{3(n+1)\,7^{n+1}}}{\frac{(x-5)^n}{3n\,7^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}3n\,7^n}{3(n+1)\,7^{n+1}(x-5)^n}\right| = \left|\frac{(x-5)}{7}\right|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x-5|}{7}$$

Sabemos entonces que la serie de potencias es convergente si $\frac{|x-5|}{7} < 1$, es decir si $|x-5| < 7$, luego si $-2 < x < 12$. Es decir la serie es ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE para $x \in (-2, 12)$.

Analizando los extremos se tiene que para $x = -2$ tenemos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-2)-5)^n}{3n\,7^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n}$, que es CONDICIONALMENTE CONVERGENTE. Por otro lado, para $x = 12$ tenemos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((12)-5)^n}{3n\,7^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$, que es DIVERGENTE.

Concluimos que la serie de potencias dada es CONVERGENTE para $x \in [-2, 12)$.

3. (6 pts.) Halle la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{5+x}}$

Solución: Aplicando propiedades del logaritmo se tiene,

$$\begin{aligned} f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{5+x}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{5+x}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln(1-x) - \ln 5\left(1+\frac{x}{5}\right)\right] = \\ = \frac{1}{2}\left[\ln(1-x) - \ln 5 - \ln\left(1+\frac{x}{5}\right)\right] \\ = \frac{1}{2}[\ln(1-x)] - \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)\right] \end{aligned}$$

Como sabemos $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, si $|x| < 1$, e integrando tenemos $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$, si

$|x| < 1$. Ahora tenemos que

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(1-x)\right] - \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)\right] =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+1}} - 1\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

O también, la forma equivalente $f(x) = -\frac{1}{2}\ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1+\left(-\left(\frac{1}{5}\right)\right)^n\right)\, x^n}{2n}$ para $|x| < 1$.

4. (6 pts.) Analice la sucesión definida por la fórmula de recurrencia

$$a_n = \frac{2n^4-1}{1+3n^4}a_{n-1}; \quad a_0 = 1.$$

Demuestre que la sucesión dada converge o demuestre que diverge según sea el caso.

Solución: Sabremos que $a_0 = 1 > 0$. Tenemos que $a_1 = \frac{1}{4}a_0 = \frac{1}{4} < a_0$. Observamos que $\dfrac{2n^4-1}{1+3n^4} > 0$ para todo $n \geq 1$, por lo tanto los $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $a_n < a_{n-1}$, para todo $n \geq 1$. En efecto, $a_n = \frac{2n^4-1}{1+3n^4}a_{n-1} < \frac{2n^4}{3n^4}a_{n-1} = \frac{2}{3}a_{n-1} < a_{n-1}$. Por lo tanto la sucesión es decreciente y acotada inferiormente (por cero). Entonces la sucesión CONVERGE.

Además es fácil verificar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ pues de lo anteriormente calculado se deduce que $a_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ para $n \geq 1$.